Chapitre 4 : Réseau direct – Réseau réciproque

4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, le réseau direct, a été introduit en se basant sur la propriété d'homogénéité qui caractérise le milieu cristallin.

Dans ce chapitre, le réseau réciproque est présenté en adoptant un point de vue purement géométrique. Ce réseau n'a pas de signification physique réelle, mais il est commode pour représenter les familles de plans réticulaires et il simplifie certains calculs géométriques. Il s'avère quasiment indispensable pour l'interprétation des phénomènes de diffraction (P.P. EWALD - 1921). On verra en effet, que les taches de diffraction sont associées aux nœuds du réseau réciproque.

A partir du réseau direct (réel), caractérisé par les 3 translations élémentaires $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ on construit un réseau (imaginaire) sur 3 vecteurs de base $\vec{a}*\ \vec{b}*\ \vec{c}*$ reliés aux vecteurs du réseau direct par une relation de réciprocité.

4.2 Direction, rangée [u, v, w]

Deux nœuds du réseau définissent une droite, on va montrer que celle-ci contient une infinité d'autres nœuds tous équidistants.

Soient $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ les deux vecteurs - position associés aux nœuds 1 et 2 :

$$\vec{r}_1 = u_1\,\vec{a} + v_1\,\vec{b} + w_1\,\vec{c} \quad et \quad \vec{r}_2 = u_2\,\vec{a} + v_2\,\vec{b} + w_2\,\vec{c}$$

Tout point de la droite D passant par les nœuds 1 et 2 est repéré par le vecteur-position :

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + m\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

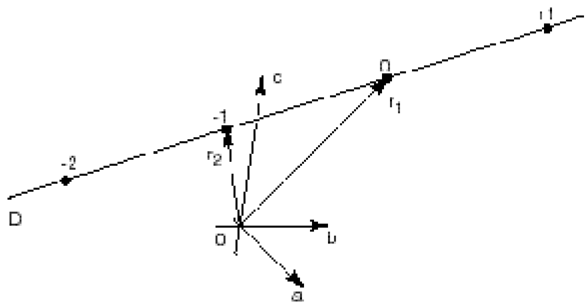


Figure 4.1 - Rangée $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ définie par les nœuds r_1 et r_2

Chaque valeur de $m \in \mathbb{Z}$ définit un nœud : les nœuds consécutifs sont donnés par :

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (u_1 - u_2)\,\vec{a} + (v_1 - v_2)\,\vec{b} + (w_1 - w_2)\,\vec{c}$$

Si $(u_1 - u_2)$, $(v_1 - v_2)$, $(w_1 - w_2)$ sont des nombres premiers entre eux, la période est la distance séparant deux nœuds consécutifs; elle est égale à $\| \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \|$

Rappel : 2 nombres sont premiers entre eux lorsque leur plus grand diviseur commun est égal à 1.

En effet, s'ils n'étaient pas des nombres premiers entre eux, ils admettraient un diviseur commun $m \neq 1$ tel que :

$u_1 - u_2 = m(u'_1 - u'_2)$ etc. .... avec $.(u'_1 - u'_2),\ (v'_1 - v'_2),\ (w'_1 - w'_2)$ premiers entre eux et on aurait :

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = m\left[(u'_1 - u'_2)\vec{a} + (v'_1 - v'_2)\vec{b} + (w'_1 - w'_2)\vec{c}\ \right] = m(\vec{r}\,'_1 - \vec{r}\,'_2)$$

La période serait non pas la distance entre 2 nœuds consécutifs mais la distance séparant m nœuds de la rangée.

En conclusion : d*eux nœuds quelconques consécutifs définissent une rangée réticulaire*

Par tout nœud repéré par $\vec{R}_0$,il passe une rangée analogue à la rangée $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ c'est à dire parallèle et de même période, et regroupant des nœuds repérés par le vecteur-position : $\vec{R} = \vec{R}_0 + m\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad m \in \mathbb{Z}$

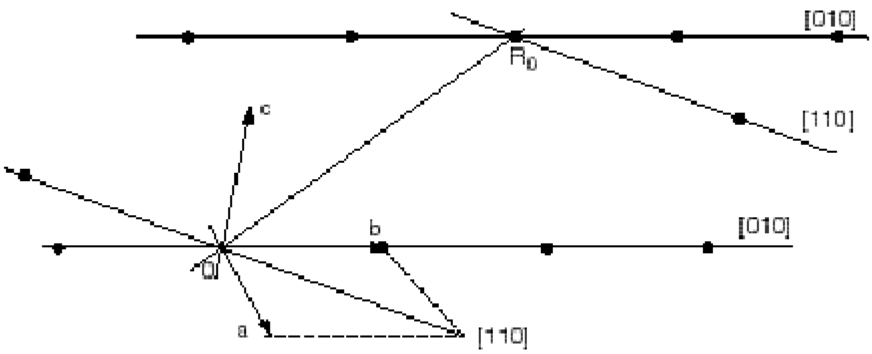


Figure 4.2 - Rangées [1 1 0] et [0 1 0]

Toutes ces rangées se caractérisent par leur direction et par la période qui sépare deux nœuds consécutifs. Pour les représenter on choisit une rangée particulière, celle qui passe par l'origine, et on la caractérise par les trois composantes u, v, w du **premier** nœud à partir de l'origine :

- o la direction est parallèle au vecteur
- o la période est égale à $\| u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c} \|$

Le symbole [u v w] représente non seulement la rangée passant par l'origine et le nœud de coordonnées u, v, w mais aussi toutes les rangées parallèles passant par tous les nœuds du réseau.

Remarques :

- o *Rangée [1 1 1] : prononcer [un, un, un].*
- o *Noter que les nœuds 1 1 1 2 2 2 3 3 3 .... définissent la même direction réticulaire ou cristallographique.*

o *Si la description est primitive, les indices u v w de la rangée sont entiers, si elle ne l'est pas, les indices peuvent être des nombres entiers ou rationnels.*

Exemples :

o maille faces centrées : rangée [1/2 1/2 1). On trouvera (à tort) la notation [1 1 2] pour désigner cette rangée : les deux notations représentent la même direction, mais pas la même période.

o maille corps centré : les nœuds 1/2 1/2 1/2 et 1 1 1 définissent la même direction cristallographique ; ils se trouvent sur la rangée [1/2 1/2 1/2]

o Pour désigner les directions, on utilise la notation [u v w]. Les quatre diagonales du cube correspondent à :

[1 1 1] [-1 1 1] [1 1 -1] [1 -1 1]

le symbole < 1 1 1 > est celui de la direction générale.

4.3 Famille de plans réticulaires

La rangée est une exemple de groupement de nœuds en sous-ensembles à une dimension. Un plan réticulaire est un regroupement à deux dimensions de nœuds appartenant à une famille.

Trois vecteurs $\vec{r}_1; \vec{r}_2; \vec{r}_3$ (non colinéaires) définissent un plan P_1 contenant une infinité de nœuds.

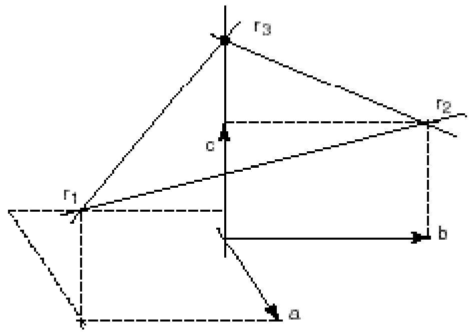


Figure 4.3 - Plan défini par trois vecteurs $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$

Les rangées, $l\ (\vec{r}_1 - \vec{r}_2); m\ (\vec{r}_1 - \vec{r}_3); n\ (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)\quad l\ m\ n \in \mathbb{Z}$, sécantes deux à deux, sont entièrement contenues dans P_1, chacune comporte une infinité de nœuds et deux d'entre elles constituent un réseau à deux dimensions

4.3.2 Par tout nœud passe un plan analogue à P_1

En effet par tout nœud, on peut faire passer deux rangées respectivement analogues à $l\ (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\ et\ m\ (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)$.

Ces deux rangées définissent un plan P_2 parallèle à P_1 et un réseau à deux dimensions analogue à celui défini par les trois vecteurs de définition $\vec{r}_1; \vec{r}_2; \vec{r}_3$ Les plans P_1, P_2, . définissent une famille (P) de plans réticulaires.

4.3.3 Les plans de la famille P sont équidistants

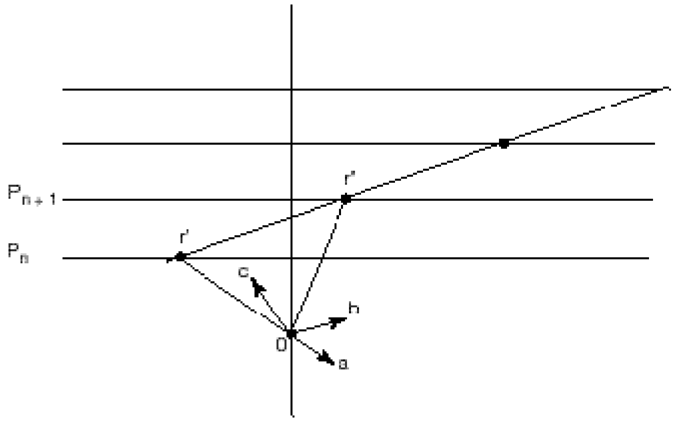


Figure 4.4 - Famille de plans réticulaires équidistants

Soient $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$ les vecteurs - position de deux nœuds situés dans deux plans P_n et P_{n+1} immédiatement voisins de la famille (P). Le vecteur $\vec{r}\,'' - \vec{r}\,'$ définit une rangée dont la période est égale à $\|\vec{r}\,'' - \vec{r}\,'\|$. La distance entre ces deux plans P_n et P_{n+1} est :

$$\left(\vec{r}\,'' - \vec{r}\,' \,|\, \vec{N}\right) = d$$

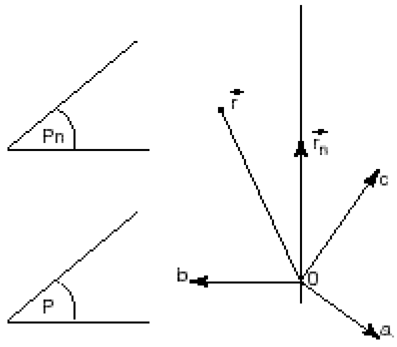
avec $\vec{N}$ vecteur unitaire porté par la normale commune aux plans réticulaires P.

4.3.4 Représentation vectorielle des familles de plans réticulaires

Chaque famille réticulaire P est représentée par un vecteur $\vec{r}_n = (1/d)\,\vec{N}$ *où* $\vec{N}$ est le vecteur unitaire porté par la normale commune , $\|\vec{r}_n\| = 1/d$ est l'inverse de la distance entre plans réticulaires.

Pour tout nœud $\vec{r} = u\,\vec{a} + v\,\vec{b} + w\vec{c}$ du plan P_m de la famille P :

$$\left(\vec{N}\,|\,\vec{r}\right) = m\,d \qquad \left(\vec{r}_n\,|\,\vec{r}\right) = \frac{1}{d}\left(\vec{N}\,|\,\vec{r}\right) = \frac{1}{d}md = m \qquad m \in \mathbb{Z}$$



- $\vec{r}_n = \frac{1}{d}\vec{N}$

Figure 4. 5 Normale commune aux plans réticulaires

Remarque : d est une grandeur bornée supérieurement par MAX (a, b, c). En choisissant de représenter les familles réticulaires par des vecteurs $\vec{r}_n = d\ \vec{N}$, leur extrémité aurait été concentrée autour de l'origine, dans une sphère de rayon égal à MAX (a, b, c).

4.4 Réseau réciproque

$\vec{r}_n$ peut être rapporté à une base quelconque $\vec{a}_n\ \vec{b}_n\ \vec{c}_n$: le produit scalaire $(\vec{r}_n|\vec{r})$ s'écrit sous forme matricielle :

$$(\vec{r}_n|\vec{r}) = (X\ Y\ Z)\begin{pmatrix}\vec{a}_n\\ \vec{b}_n\\ \vec{c}_n\end{pmatrix}(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix} = m$$

En définissant les vecteurs de base par $(\vec{a}_{ni}|\vec{a}_{nj}) = d_{ij}$

la matrice (3,3) $\begin{pmatrix}\vec{a}_n\\ \vec{b}_n\\ \vec{c}_n\end{pmatrix}(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ se réduit à la matrice unité, et le produit scalaire $(\vec{r}_n|\vec{r})$

s'écrit sous la forme plus simple : $(\vec{r}_n|\vec{r}) = X\,u + Y\,v + Z\,w = m \quad m \in \mathbb{Z}$

Les composantes X Y Z sont **des nombres entiers**. En effet, pour tout nœud u, v, w du m ^{ième} plan de la famille P la relation ci-dessus est vérifiée, elle l'est aussi pour le nœud $u+1, v, w$ appartenant au n^{ième} plan :

$$X\ (u+1) + Y\,v + Z\,w = n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

soit $X = m - n \in \mathbb{Z}$ et de même pour $Y\ et\ Z$

Par convention, les composantes $X\ Y\ Z\ \ de\ \ \vec{r}_n$ sont dénommées : **h , k , l.**

L'ensemble des nœuds générés par les translations :

$$\vec{r}_n = h\,\vec{a}_n + k\,\vec{b}_n + l\,\vec{c}_n \qquad avec \quad h\,k\,l \in \mathbb{Z}$$

forme **un réseau triplement périodique**.

4.4.1 Définition du réseau réciproque

Le réseau qui vient d'être construit est appelé réseau réciproque, il est rapporté à trois vecteurs de base dénommés, par convention, $\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*$ et satisfaisant aux conditions $(\vec{a}^*_i \,|\, \vec{a}_j) = d_{ij}$, soit encore :

$$(\vec{a}^* | \vec{a}) = 1 \qquad (\vec{a}^* | \vec{b}) = 0 \qquad (\vec{a}^* | \vec{c}) = 0$$
$$(\vec{b}^* | \vec{b}) = 1 \qquad (\vec{b}^* | \vec{a}) = 0 \qquad (\vec{b}^* | \vec{c}) = 0$$
$$(\vec{c}^* | \vec{c}) = 1 \qquad (\vec{c}^* | \vec{a}) = 0 \qquad (\vec{c}^* | \vec{b}) = 0$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont les vecteurs de base du réseau direct.

En associant les trois vecteurs $\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*$ à un triplet d'entiers relatifs $h\,k\,l$ on construit donc un réseau triplement périodique dans lequel on peut regrouper les nœuds en rangées et en plans comme dans le réseau direct. Un vecteur du réseau réciproque est désigné par :

$$\vec{r}^*_{hkl} = h\,\vec{a}^* + k\,\vec{b}^* + l\,\vec{c}^* \qquad avec \quad h\,k\,l \in \mathbb{Z}$$

Considérons une rangée $[h\ k\ l]^*$ du réseau réciproque :

- elle est parallèle à la normale commune d'une famille de plans réticulaires (du réseau direct)
- les indices h k l de la rangée (premier nœud à partir de l'origine) désignent la famille de plans réticulaires concernée
- la période $\|h\,\vec{a}^* + k\,\vec{b}^* + l\,\vec{c}^*\|$ est l'inverse de la distance D_{hkl} entre plans de la famille h k l
- les nœuds $\cdots 2h\ 2k\ 2l \cdots\cdots nh nk nl\ \cdots$. de la rangée sont associés à la même famille de plans réticulaires. On verra leur signification à propos de la diffraction.

Remarque : l'unité du réseau réciproque étant l'inverse d'une longueur, on notera que celui-ci n'a aucune existence physique : on ne mesure pas les paramètres du réseau réciproque !

4.4.2 Interprétation géométrique de la base réciproque

$\vec{a}*$ est normal au plan $(\vec{b},\vec{c})$ et $\vec{c}*$ au plan $(\vec{a},\vec{b})$., ;On a, par exemple, pour $\vec{a}*$:

$\vec{a}*=p(\vec{b}\wedge\vec{c})$:

mais $(\vec{a}*|\vec{a})=1=(p(\vec{b}\wedge\vec{c})|\vec{a})=pV$ avec V , volume de la maille (a, b, c).

Pour les trois vecteurs réciproques :

$$\vec{a}*=(\vec{b}\wedge\vec{c})/V \qquad \vec{b}*=(\vec{c}\wedge\vec{a})/V \qquad \vec{c}*=(\vec{a}\wedge\vec{b})/V$$

Remarque : en Physique des Solides et par convention, la base $a*_i$ du réseau réciproque est définie relativement à la base a_j du réseau direct par $(\vec{a}_i*|\vec{a}_j)=2p\, d_{ij}$

Il s'en suit que $\vec{a}*=2p\,(\vec{b}\wedge\vec{c})/V$ *etc...*

4.5 Indices de Miller h k l

Tout vecteur- position $\vec{r}^{\,*}_{hkl}=h\vec{a}*+k\vec{b}*+l\vec{c}*$ a des composantes $h\ k\ l$ entières ; $h\ k\ l$ l sont aussi les indices de Miller **(entiers)** de la famille de plans réticulaires $(h\ k\ l)$ du réseau direct ayant $\vec{r}^{\,*}_{hkl}$ pour normale commune. Par convention, on écrit $h\ k\ l$ entre parenthèses.

Exemple :

Les plans de la famille (2 3 5) ou les plans (2 3 5) . L'habitude est de prononcer (deux, trois, cinq).

Les indices h k l sont des **entiers premiers entre eux**, si la base $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$ du réseau direct est **primitive.** Et réciproquement.

En effet, s'ils n'étaient pas premiers entre eux, ils auraient un diviseur commun $m\neq 1$

$h=mh' \quad k=mk' \quad l=ml' \quad m\in\mathbb{Z}$

pour le nœud $u\ \ v\ \ w$ du m-ième plan : $m(h'u+k'v+l'w)=m \quad m\in\mathbb{Z}$ soit :

$h'u+k'v+l'w=m/m$

or $u\ \ v\ \ w\in\mathbb{Z}$ (maille primitive par hypothèse) et $h'\ \ k'\ \ l'\in\mathbb{Z}$ donc $m=1$ *et* $h\ k\ l$ sont premiers entre eux

En résumé **, par tout nœud** $(u\ \ v\ \ w)$, du **réseau direct**, il passe **un plan et un seul** de la famille $(h\ k\ l)$: son numéro m $(m\in\mathbb{Z})$, à partir de l'origine est donné par la relation :

$$hu+kv+lw=m \qquad m\in\mathbb{Z}$$

4.5.1 Interprétation géométrique des Indices de Miller h k l

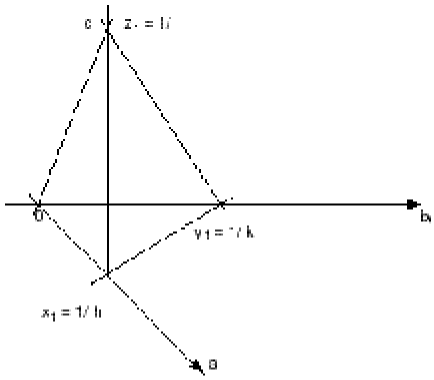


Figure 4.6 Interprétation des indices h k l

La relation $hu + kv + lw = m \quad m \in \mathbb{Z}$ est associée au réseau à deux dimensions de nœuds $u \;\; v \;\; w$ situés dans le m^{ième} plan de la famille P_{hkl}.

Pour tout point **courant** de ce plan ayant pour coordonnées $x\; y\; z \in \mathbb{Q}$ $hx + ky + lz = m$

Le **m^{ième} plan** à partir de l'origine coupe l'axe a en un point de coordonnées $x_m \; 0 \; 0$, tel que: $hx_m = m \; soit \; x_m = m / h$ c'est-à-dire en un point :

$x_1 = 1/h$ pour le plan numéro1, $x_2 = 2/h$ pour le plan numéro 2 ,………., $x_h = h/h = 1$ pour le plan de numéro h

et de même pour les axes b et c

Conséquences :

o le **premier plan** de la famille$(h\; k\; l)$ coupe les axes a b c respectivement en des point de coordonnées.$x_1 0\; 0,\;\; 0\; y_1\; 0,\;\; 0 0\; z_1$, tels que : $hx_1 = 1,\;\; ky_1 = 1,\;\; lz_1 = 1$ ce qui s'écrit aussi : $h = 1/x_1 \quad k = 1/y_1 \quad l = 1/z_1$

Les **indices** $h\; k\; l$ sont les **inverses des intersections du premier plan** de la famille $(h\; k\; l)_l$ avec les axes a b c.

o le plan de la famille $(h\; k\; l)_l$ passant en 1 0 0 est le h ^{iéme} à partir de l'origine et de même, le plan passant en 0 1 0 est le k^{ième} à partir de l'origine, le plan passant en 0 0 1 est le l^{ième} à partir de l'origine.

o Les indices (h k l) sont égaux au nombre de plans qui passent entre deux nœuds consécutifs dans les directions [1 0 0], [0 1 0] et [0 0 1]. Et inversement

Remarques importantes :

Quand un indice est nul, l'intersection avec l'axe correspondant est rejetée à l'infini le plan est parallèle à l'axe : (1 3 0) et (0 0 2) sont les indices de plans parallèles respectivement à l'axe c et au plan a, b.

Quand le premier plan à partir de l'origine d'une famille coupe un axe sur sa partie négative, on le note avec un indice négatif. $(\bar{3}\;\; 4\;\; 0)$ *coupe l'axe a en -1 / 3, l'axe b en ¼*

Les notations $(h\ k\ l)$ *et* $(\bar{h}\ \bar{k}\ \bar{l})$ *désignent des plans de la même famille.*

4.5.2 Exemple : Famille (3, 4, 2).

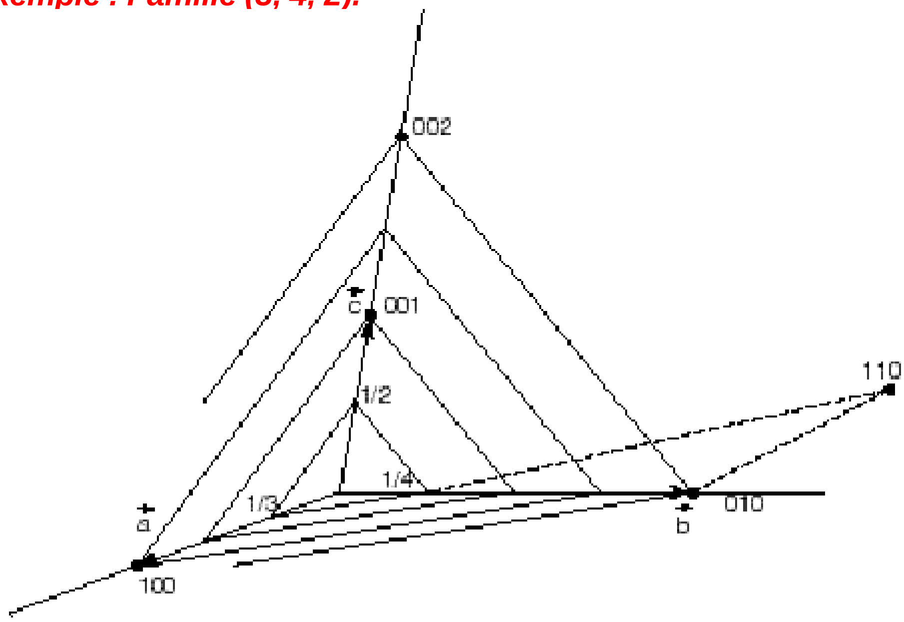


Figure 4.7 - Représentation des plans (3 4 2)

En appliquant la relation (1), on vérifie que :

- les nœuds 1, 0, 0 ; 0, 1, 0 ; 0, 0, 1 appartiennent respectivement aux plans

  m = 3, m = 4, m = 2

- les nœuds -1, 1, 0 ; 1, 0, -1 ; 1, -1, 1 ; ..... appartiennent au premier plan réticulaire à partir de l'origine

- les nœuds 0 1 0 et 0 0 2 appartiennent au même plan réticulaire : celui qui a le numéro 4

La famille (h k l) partagera a b c en h / k / l parties égales ; pour les plans (3 4 2) :

- sur a : 3 parties égales ; entre 0 0 0 et 1 0 0 : 3 plans
- sur b : 4 parties égales ; entre 0 0 0 et 0 1 0 : 4 plans
- sur c : 2 parties égales ; entre 0 0 0 et 0 0 1 : 2 plans

4.6 Règle d'existence des indices h k l

Les règles d'existence des nœuds h k l du réseau réciproque se déduisent de la définition des plans réticulaires : il passe un plan réticulaire de la famille par tous les nœuds de réseau de composantes entières ou fractionnaires.

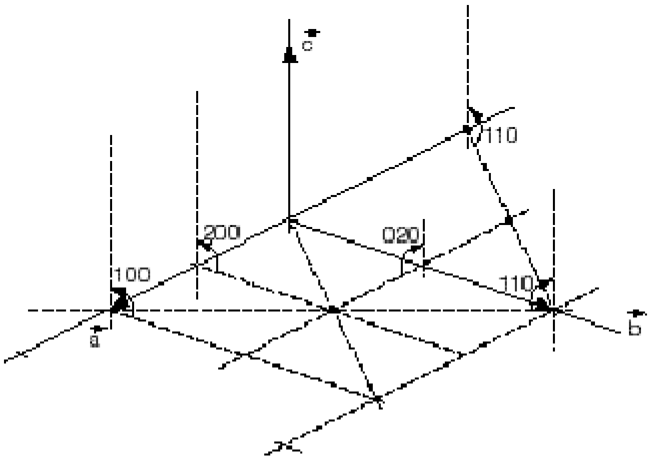


Figure 4.8 - Maille face C centrée : 2 nœuds en 0 0 0 et 1/2 1/2 0

Considérons une maille C centrée :

Le premier plan de la famille (1 0 0) délaisse le nœud 1/2 1/2 0 : cette famille est de ce fait interdite.

o Le premier plan de la famille (2 0 0) passe par le milieu de a : il contient 1/2 1/2 0. Par tous les nœuds de coordonnées u et v demi-entières il passe un plan de la famille (2 0 0) : elle est donc autorisée et aussi les familles (h 0 0) pourvu que h soit pair.

o De même pour les plans (0 k 0), pourvu que k soit pair.

o Le premier plan de la famille (1 1 0) contient aussi le nœud 1/2 1/2 0 : cette famille est autorisée.

4.6.1 Réseaux ayant une maille primitive

Rappelons le résultat établi au paragraphe 4 :

Maille primitive : k k l premiers entre eux

4.6.2 Réseaux ayant une maille face (ou base) centrée

L'équation du plan h k l passant par un nœud u v w est :

(1) $h\,u + k\,v + l\,w = m \qquad m \in Z$

il passe un plan identique par le nœud voisin décalé de la translation 1/2 1/2 0 (face C centrée) :

(2) $h\,(u + 1/2) + k\,(v + 1/2) + l\,w = m' \qquad m' \in Z$

En combinant (1) et (2) on obtient : $h / 2 + k / 2 = m' - m \in Z$

ou encore $h + k = 2n$

Le réseau réciproque est base centrée sur une maille $2\vec{a}^*, 2\vec{b}^*, \vec{c}\,^*$

On procède de la même façon pour les faces A et B centrées. Finalement, la condition générale d'existence des h k l est :

Face A : k + l = 2n Face B : h + l = 2n Face C : h + k = 2n

4.6.3 Réseaux ayant une maille faces centrées (F)

L'équation du plan h k l passant par un nœud u v w est :

(1) $h\,u + k\,v + l\,w = m \qquad m \in Z$

il passe un plan identique par les nœuds voisins décalés par les translations :

1/2 1/2 2 0 1/2 0 1/2 0 1/2 1/2 :

(2) $h\,(u + 1/2) + k\,(v + 1/2) + l\,w = m' \qquad m' \in Z$

(3) $h\,(u + 1/2) + k\,v + l\,(w + 1/2) = m'' \qquad m'' \in Z$

(4) $h\,u + k\,(v + 1/2) + l\,(w + 1/2) = m''' \qquad m''' \in Z$

En combinant (1) (2) (3) et (4) on obtient :

$(h + k) / 2 = m' - m \in Z$

$(h + l) / 2 = m'' - m \in Z$

$(h + k) / 2 = m''' - m \in Z$

Soit encore : $h + k = 2n,\ h + l = 2m,\ k + l = 2p$

Finalement les h k l existent si :

(F) == > h, k, l sont de même parité

On vérifie que le réseau réciproque est **corps centré** sur la base $2\vec{a}^*,\ 2\vec{b}^*,\ 2\vec{c}^*$.

Exemple : 2 0 0, 1 1 1, 2 0 4, 1 3 1, ...

4.6.4 Réseaux ayant une maille corps centré (I)

Les deux relations :

$h\,u + k\,v + l\,w = m \qquad m \in Z$

et $h\,(u + 1/2) + k\,(v + 1/2) + l\,(w + 1/2) = m' \qquad m' \in Z$

se combinent pour donner : $(h + k + l) / 2 = m' - m \in Z$

Finalement, la condition d'existence des nœuds h k l du réseau réciproque est :

(I) == > La somme h + k + l est paire

Exemple : 2 0 0 1 1 0 1 3 2

On vérifie que le réseau réciproque est **faces centrées** sur la base $2\vec{a}^*,\ 2\vec{b}^*,\ 2\vec{c}^*$

Remarque :

La dualité entre réseaux se manifeste clairement : le réciproque du réseau F. C. est un réseau C.C. Et inversement.

4.6.5 Description hexagonale des réseaux rhomboédriques

Dans la description hexagonale, Fig. 3.2, il y a trois nœuds par maille : le premier en 0 0 0, les deux autres en 2/3 1/3 1/3 et 1/3 2/3 2/3 .

Les h k l satisfont aux relations :

$h\ u \quad +k\ v \quad + lw = m \qquad m \in Z$

$h (u + 2/3) + k (v + 1/3) + l (w + 1/3) = m' \qquad m' \in Z$

$h (u + 1/3) + k (v + 2/3) + l (w + 2/3) = m'' \qquad m'' \in Z$

d'où les relations équivalentes :

$2h + k + l = 3n \quad h + 2k + 2l = 3n$

La condition générale de réflexion s'écrit finalement :

$$\mathbf{- h + k + l = 3n}$$

Exemple : 1 1 0 0 1 2 1 1 2 1 0 2 2 1 1